チェバの定理とその逆

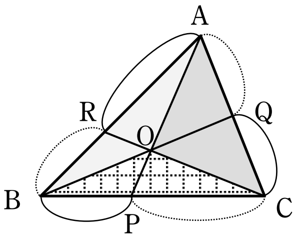
チェバの定理

△ABC と 1 点 O があり，直線 AO, BO, CO が辺 BC, CA, AB またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とすれば，

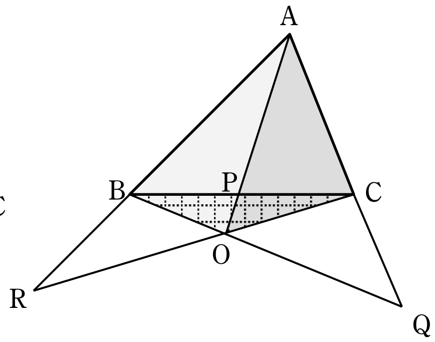
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成立する。ただし，点 O は△ABC の辺とその延長上にないとする。

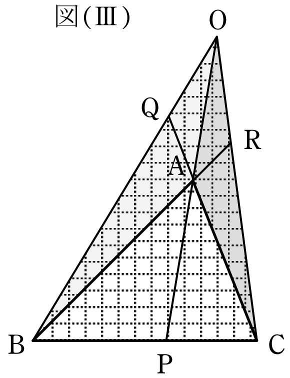
図(I)



図(Ⅱ)



図(Ⅲ)



〔証明〕 $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}$， $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}$， $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}$ であることから，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}=1$$

が成立する。 **終**

チェバの定理の逆

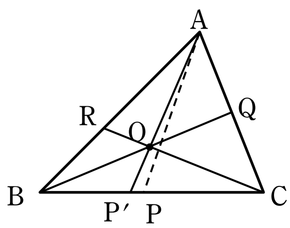
△ABC の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長上にそれぞれ点 P, Q, R があり，3 点 P, Q, R ともに辺上にあるか，または 2 点が辺の延長上にあり他の 1 点が辺上にあって，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成立し，3 直線 AP, BQ, CR のうちいずれか 2 つが交われば 3 直線は 1 点で交わる。

〔証明〕BQ と CR が交わるとして証明すれば十分である。

BQ，CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC またはその延長との交点を P′とすれば，チェバの定理より



$$\frac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \quad\cdots\cdots①$$

が成立する。仮定より $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ ……②

①，②より， $\dfrac{\mathrm{BP'}}{\mathrm{P'C}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$ ，すなわち $\mathrm{BP'}:\mathrm{P'C}=\mathrm{BP}:\mathrm{PC}$ ……③ が成立する。

Q, R が辺上にあるか，または延長上にあるかによって，P および P′ が辺 BC 上にあるか，延長上にあるかが決まり，いずれにおいても①より P と P′は一致する。

よって，3 直線 AP, BQ, CR は 1 点 O で交わる。 **終**

メネラウスの定理とその逆

メネラウスの定理

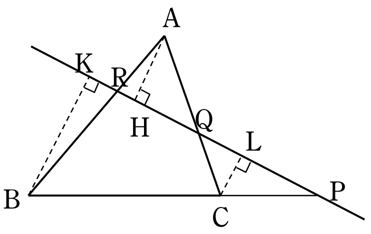
△ABC と頂点 A, B, C のいずれをも通らない直線 l があり，辺 BC, CA, AB またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とすれば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

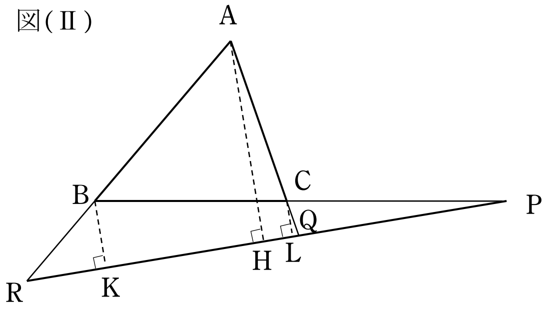
が成立する。

メネラウスの定理では，3 点 P, Q, R ともに辺の延長上にあるか，または 2 つが辺上にあり他の 1 つが延長上にあることになる。

図(Ⅰ)



図(Ⅱ)



〔証明〕3 点 A, B, C から直線 l に下ろした垂線の足をそれぞれ H, K, L とすると，

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BK}{CL},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{CL}{AH},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{AH}{BK}$$

であることから，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BK}{CL}\cdot\frac{CL}{AH}\cdot\frac{AH}{BK}=1$$

が成立する。

終

メネラウスの定理の逆

△ABC の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長上にそれぞれ点 P, Q, R があり，3 点 P, Q, R ともに辺の延長上にあるか，または 2 点が辺上にあり他の 1 点が延長上にあって，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成立するとき，3 点 P, Q, R は 1 直線上にある。

証明は，チェバの定理の逆の場合と同様にできる。